4.4.18 Absolutní hodnota III

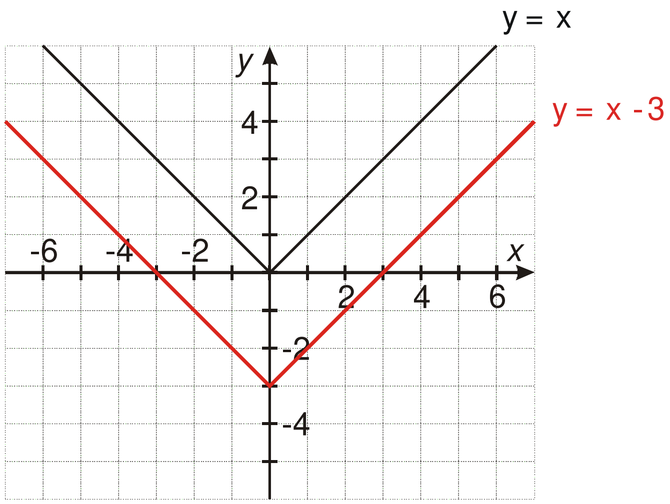
Předpoklady: 040417

Př. 1: Nakresli grafy funkcí s absolutní hodnotou.

a) $y=|x|-3$ b) $y=-2|x|$ c) $y=|-x|-2$ d) $y=-|x|-2$

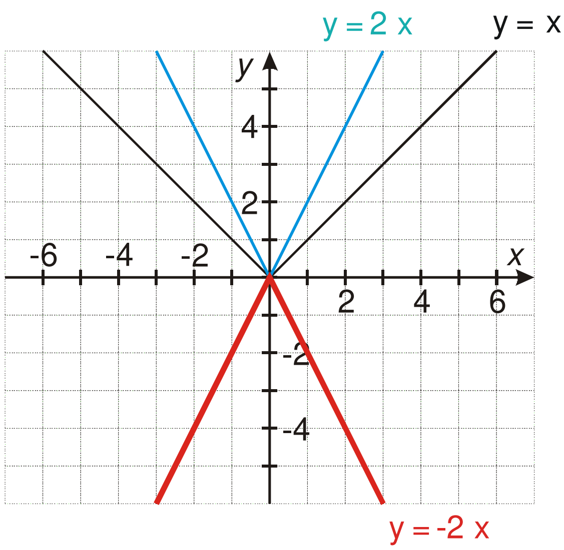
a) $y=|x|-3$

Předpis funkce se od základní funkce liší výrazem -3 $\Rightarrow$ ve srovnání s funkcí $y=|x|$ budou všechny hodnoty o 3 menší $\Rightarrow$ graf se posune o 3 dolů.



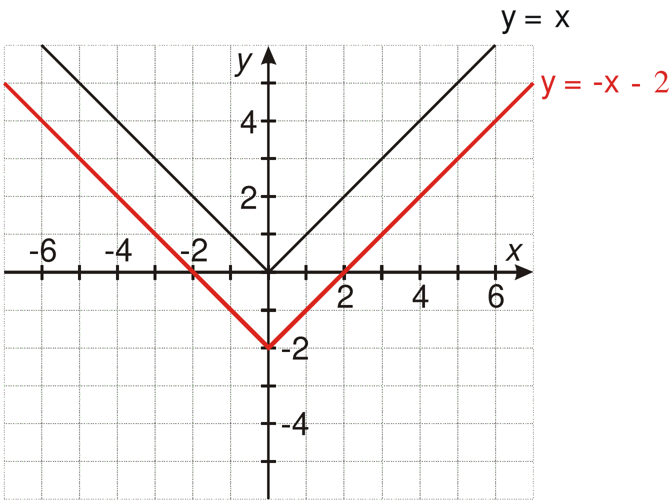
b) $y=-2|x|$

- Hodnoty funkce $y=|x|$ násobíme dvěma $\Rightarrow$ funkce bude růst rychleji $\Rightarrow$ tvar písmena V bude strmější ,
- všechny hodnoty násobíme znaménkem - $\Rightarrow$ kladná čísla se změní na záporná $\Rightarrow$ graf se převrátí podle osy *x*.



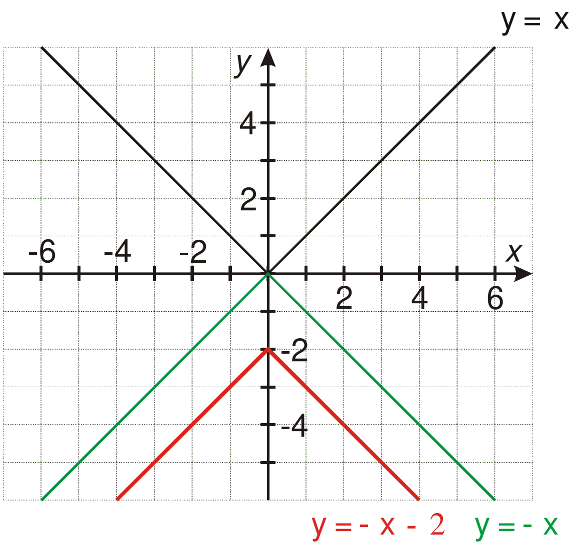
c) $y = |-x| - 2$

- Znaménko mínus uvnitř absolutní hodnoty na grafu nic nemění (je úplně jedno jestli do absolutní hodnoty dosadíme +2 nebo –2, proto je jedno i to, jestli je uvnitř x nebo –x).
- Výraz –2 zmenší všechny hodnoty o 2 $\Rightarrow$ graf funkce $y = |x|$ se posune o 2 dolů.



d) $y = -|x| - 2$

- Hodnoty vyrobené absolutní hodnotou násobíme znaménkem - $\Rightarrow$ kladná čísla se změní na záporná $\Rightarrow$ graf se převrátí podle osy x,
- od hodnot z předchozího kroku odečítáme -2 $\Rightarrow$ ve srovnání s funkcí $y = -|x|$ budou všechny hodnoty o 2 menší $\Rightarrow$ graf se posune o 2 dolů.

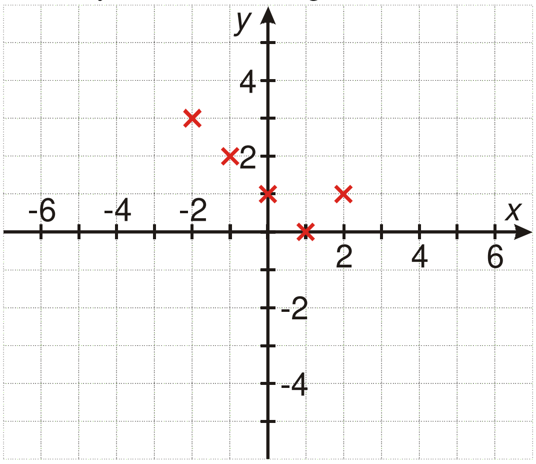


Př. 2: Nakresli graf funkcí $y = |x-1|$ a $y = |x+2|$. Ve kterých bodech se protínají se souřadnými osami?

$y = |x-1|$: jiný příklad než ostatní, graf určitě nebudeme posunovat dolů (vše je uvnitř absolutní hodnoty, proto hodnota y nemůže být menší než 0).
$\Rightarrow$ zkusíme pomocí tabulky

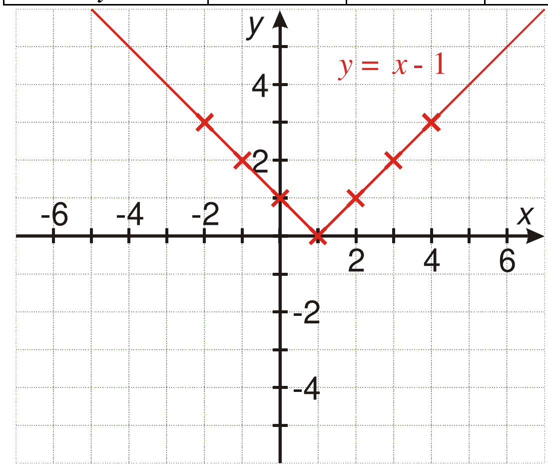
x	-2	-1	0	1	2
y	3	2	1	0	1

Hodnoty zakreslíme do grafu



Zdá se, že „véčko“ grafu se posunulo o 1 doprava, ověříme to ještě pomocí dalších dvou hodnot v tabulce.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	3	2	1	0	1	2	3

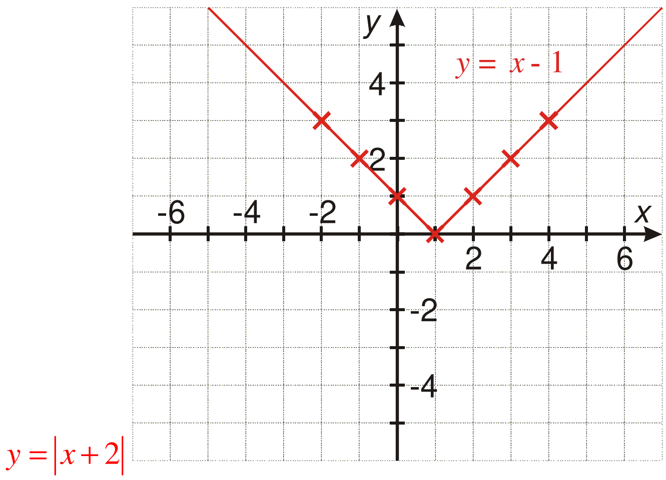


Další možné vysvětlení toho, proč se graf posunul doprava:

- uvnitř absolutní hodnoty je $x-1$ $\Rightarrow$ za x musíme dosadit číslo 1, aby uvnitř absolutní hodnoty byla nula, které odpovídá špička „véčka“ $\Rightarrow$ graf se posune po ose x tak, aby špička grafu byla u čísla $x=1$,
- uvnitř absolutní hodnoty je $x-1$ $\Rightarrow$ čísla dosazená za x se před uplatněním absolutní hodnoty zmenší o 1 $\Rightarrow$ graf funkce $y=|x-1|$ má stejné hodnoty jako graf funkce $y=|x|$ pro hodnoty x o jedna větší $\Rightarrow$ je stejný, ale posunutý o 1 doprava.

$y=|x+2|$: odhad podle předchozího příkladu: graf bude posunutý po ose x o dva doleva (za x musíme dosadit –2, aby uvnitř absolutní hodnoty byla nula).
$\Rightarrow$ ověříme pomocí tabulky

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
y	3	2	1	0	1	2	3



Další možné vysvětlení toho, proč se graf posunul doleva:

- uvnitř absolutní hodnoty je $x+2$ $\Rightarrow$ čísla dosazená za x se před uplatněním absolutní hodnoty zvětší o 2 $\Rightarrow$ graf funkce $y=|x+2|$ má stejné hodnoty jako graf funkce $y=|x|$ pro hodnoty x o dva menší $\Rightarrow$ je stejný, ale posunutý o 2 doleva.

Př. 3: Projdi si řešení příklad v minulých hodinách a popiš, jakým způsobem ovlivňují hodnoty, které dosazujeme za parametry v předpisu funkce $y=a|x+b|-c$ výsledný graf.

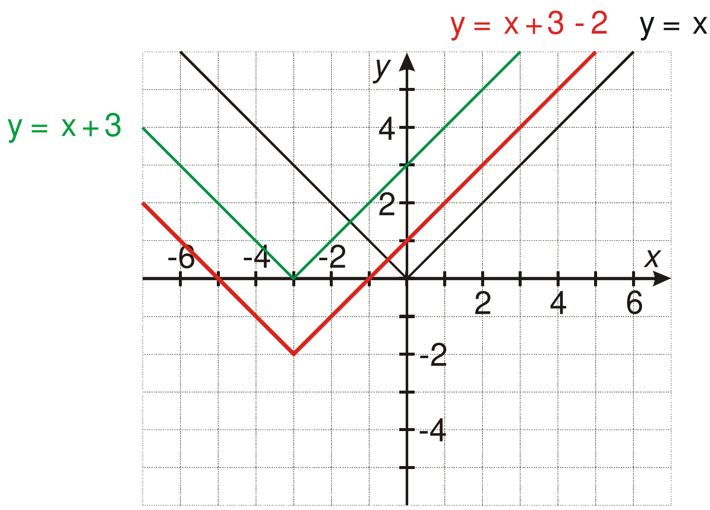
Význam jednotlivých konstant v předpisu funkce $y=a|x+b|-c$:

- a – mění sklon (strmost tvaru *V*, větší hodnota a znamená strmější graf), pokud je $a<0$ graf se převrátí podle osy x
- b – posouvá graf vodorovně po ose x, ale na druhou stranu ($|x+2|$ posune vrchol grafu do $x=-2$),
- c – posouvá graf svisle

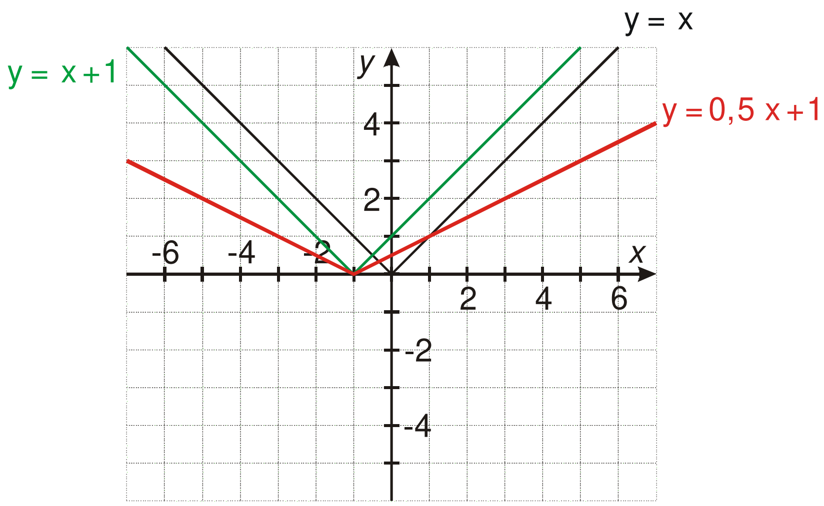
Př. 4: Nakresli grafy funkcí s absolutní hodnotou.

a) $y=|x+3|-2$ b) $y=0,5|x+1|$ c) $y=-2|x-1|+2$

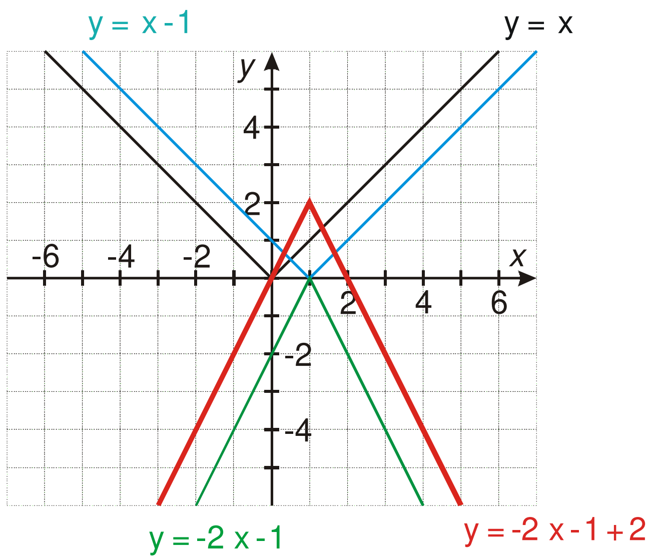
a) $y=|x+3|-2$



b) $y = 0,5|x+1|$



c) $y = -2|x-1| + 2$



Pedagogická poznámka: Následující příklady jsou závěrečné bonbónky pro odvážné. Jde o to, jak dokáží být opatrní v nestandardní situacích.

Př. 5: Nakresli grafy funkcí:

a) $y = |2x-4|$ b) $y = |x| + x$ c) $y = ||x-1|-1| - 3$

a) $y = |2x-4|$

V předpisu se násobí dvojkou, ale násobení není vně absolutní hodnoty, jak v předchozích příkladech $\Rightarrow$ zkusíme násobení dostat před absolutní hodnotu.

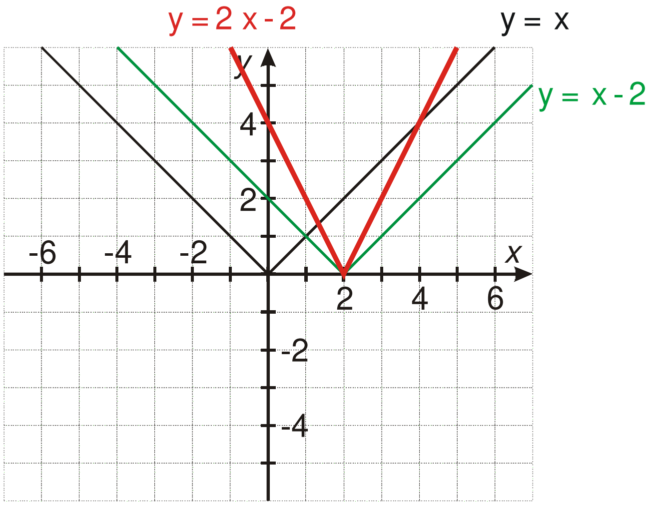
$y = |2x-4| = |2(x-2)| = 2|x-2|$

Kontrola: Co musíme dosadit za *x*, abychom měli uvnitř absolutní hodnoty 0?

- $y = |2x-4| \;\Rightarrow\; 2x-4=0 \;\Rightarrow\; 2x=4 \;\Rightarrow\; x=2$

- $y = 2|x-2| \Rightarrow x = 2$

Zřejmě jsme úpravu provedli správně.



b) $y = |x| + x$

Ve všech předchozích příkladech bylo v předpisu jenom jedno *x*, ze kterého jsme vycházeli a snažili jsme se sledovat, co se děje s čísly, které z něj postupně vznikají. V tomto předpisu se *x* vyskytuje na dvou místech.

Zkusíme odstranit absolutní hodnotu pomocí definice.

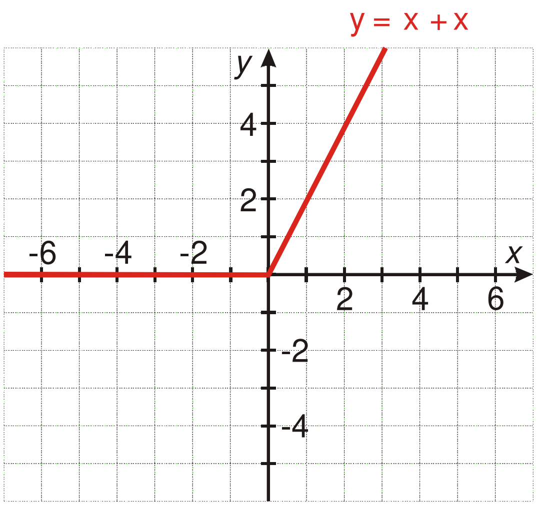
Víme:

- $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow y = |x| + x = x + x = 2x$,
- $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow y = |x| + x = -x + x = 0$.

$\Rightarrow$ Funkce se chová pro kladná čísla jako funkce $y = 2x$, pro záporná jako funkce $y = 0$.

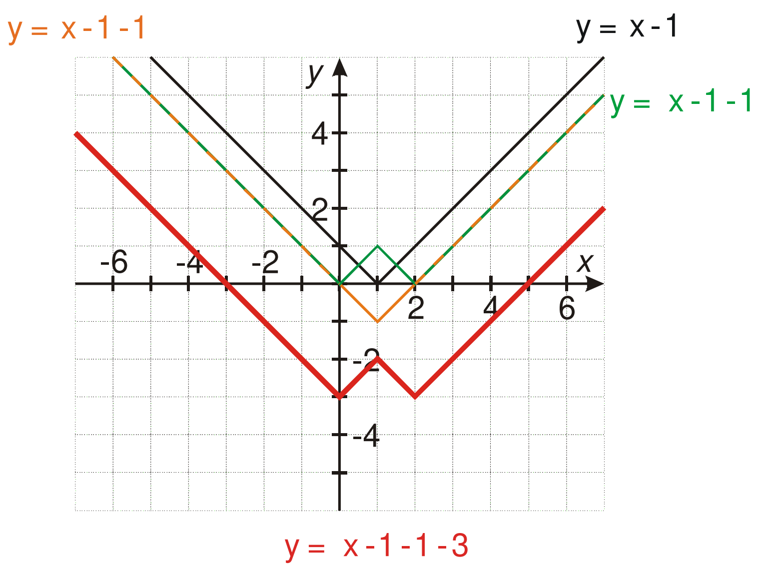
Ověříme tabulkou:

x	-5	-1	0	1	5
$y = \|x\| + x$	$5 + (-5) = 0$	$1 + (-1) = 0$	$0 + 0 = 0$	$1 + 1 = 2$	$5 + 5 = 10$



c) $y = ||x-1| - 1| - 3$

Zkusíme postupovat podobně jako v předchozí části hodiny - začneme u funkce $y = |x-1|$ a budeme sledovat jak se postupně mění její hodnoty.



Shrnutí: